บทที่ 4
ผลการวิจัย

การวิจัยเรื่อง การพัฒนาชุดฝึกอบรมทางไกล เรื่อง กิจกรรมโครงงานคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาชุดฝึกอบรมทางไกล เพื่อประเมินการใช้ชุดฝึกอบรมทางไกล ในด้านความรู้ และความพึงพอใจ และเพื่อวิเคราะห์ผลการจัดกิจกรรมโครงงานคณิตศาสตร์ของผู้เข้ารับการอบรม ผู้วิจัยขอนำเสนอผลการวิจัยดังนี้

ตอนที่ 1 การประเมินการใช้ชุดฝึกอบรมทางไกล เรื่อง กิจกรรมโครงงานคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา ในด้านความรู้ และด้านความพึงพอใจ

ตอนที่ 2 การวิเคราะห์ผลการทำกิจกรรมโครงงานคณิตศาสตร์ของครูผู้เข้ารับการอบรม

ตอนที่ 1 การประเมินการใช้ชุดฝึกอบรมทางไกล เรื่อง กิจกรรมโครงงานคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา ในด้านความรู้ และด้านความพึงพอใจ

1.1 การประเมินการใช้ชุดฝึกอบรมทางไกล เรื่อง กิจกรรมโครงงานคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา ในด้านความรู้ พิจารณาจากคะแนนจากการประเมินการทำโครงงานอย่างง่าย และคะแนนการประเมินการทำโครงงานคณิตศาสตร์ของครูผู้เข้ารับการอบรมจำนวน 120 คน แบ่งเป็น 30 กลุ่ม กลุ่มละ 4 คน และให้คะแนนเป็นรายกลุ่ม มีคะแนนเฉลี่ยรวมด้านความรู้ 48.27 คะแนน จากคะแนนเต็ม 60 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 80.44 รายละเอียดปรากฏผลดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 ผลการประเมินการใช้ชุดฝึกอบรมทางไกล เรื่อง กิจกรรมโครงงานคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา ในด้านความรู้

จำนวนผู้เข้ารับการอบรม	คะแนนเฉลี่ยการทำโครงงานอย่างง่าย (20 คะแนน)	คะแนนเฉลี่ยการทำโครงงานคณิตศาสตร์ (40 คะแนน)	คะแนนด้านความรู้		ร้อยละของคะแนนด้านความรู้
			คะแนนเฉลี่ยรวม (60 คะแนน)	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	
120 คน (30 กลุ่ม)	16.17	32.10	48.27	3.07	80.44

1.2 การประเมินการใช้ชุดฝึกอบรมทางไกล เรื่อง กิจกรรมโครงงานคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา ในด้านความพึงพอใจ พิจารณาจากคะแนนการตอบแบบสอบถามของกลุ่มตัวอย่าง เป็นรายคน จำนวน 120 คน ซึ่งแบ่งเป็น 2 ด้าน คือ ด้านความรู้ที่ได้รับ และ ด้านความพึงพอใจต่อการอบรม ผลปรากฏว่า ผู้เข้ารับการอบรมมีความพึงพอใจทั้งสองเรื่องในระดับพึงพอใจมาก เมื่อพิจารณาในรายละเอียด ความพึงพอใจด้านความรู้ที่ได้รับสามลำดับแรกคือ การจัดการเรียนรู้โดยสอดแทรกกิจกรรมโครงงาน กิจกรรมที่ส่งเสริมการทำโครงงานคณิตศาสตร์ และการขยายแนวคิดจากโครงงานอย่างง่ายสู่โครงงานเต็มรูป ผู้เข้ารับการอบรมมีความพึงพอใจการประเมินโครงงานคณิตศาสตร์เป็นลำดับสุดท้าย รายละเอียดของผลการประเมินความพึงพอใจด้านความรู้ที่ได้รับ แสดงในตารางที่ 2

ตารางที่ 2 ผลการประเมินการใช้ชุดฝึกอบรมทางไกล เรื่อง กิจกรรมโครงงานคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา ในด้านความพึงพอใจเกี่ยวกับความรู้ที่ได้รับ

ที่	รายการประเมิน	ค่าเฉลี่ย	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	แปลความหมาย
	เรื่องที่ 1 ความรู้ที่ได้รับ			
1	ความหมาย และประเภทของโครงงานคณิตศาสตร์	4.28	0.87	มาก
2	ความสำคัญ จุดมุ่งหมายและหลักการของโครงงานคณิตศาสตร์	4.24	0.73	มาก
3	ขั้นตอนในการทำโครงงานคณิตศาสตร์	4.21	0.71	มาก
4	การประเมินโครงงานคณิตศาสตร์	4.12	0.78	มาก
5	การจัดการเรียนรู้โดยสอดแทรกกิจกรรมโครงงาน	4.43	0.76	มาก
6	กิจกรรมที่ส่งเสริมการทำโครงงานคณิตศาสตร์	4.38	0.63	มาก
7	การขยายแนวคิดจากโครงงานอย่างง่ายสู่โครงงานคณิตศาสตร์เต็มรูป	4.35	0.68	มาก
8	การศึกษาตัวอย่างโครงงานคณิตศาสตร์	4.31	0.66	มาก
9	การวิจัยเกี่ยวกับโครงงานคณิตศาสตร์	4.22	0.66	มาก
10	การฝึกปฏิบัติทำโครงงานคณิตศาสตร์	4.33	0.74	มาก
	รวม	4.29	0.71	มาก

ความคิดเห็นเพิ่มเติมในด้านความรู้ที่ได้รับจากชุดฝึกอบรมฯ มีดังนี้

1. มีความรู้ความเข้าใจอย่างชัดเจนขึ้นในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่สอดแทรกการทำโครงงานแบบค่อยเป็นค่อยไป
2. ได้เห็นวิธีการและขั้นตอนในการฝึกนักเรียนให้สามารถทำโครงงานได้
3. ตัวอย่างโครงงานอย่างง่ายทั้งที่มีในเอกสารและจากผลการฝึกปฏิบัติของผู้เข้าอบรมมีความหลากหลาย และสามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้โดยตรง ควรนำออกเผยแพร่
4. แนวคิดในการนำแบบฝึกหัด กิจกรรมต่างๆ คณิตศาสตร์นันทนาการ และสิ่งรอบตัว นำมาจัดทำเป็นโครงงาน ทำให้ได้แนวคิดในการหาหัวข้อโครงงาน
5. ได้รับความรู้ด้านทฤษฎีเกี่ยวกับการประเมินโครงงานและการทำวิจัยเกี่ยวกับโครงงานคณิตศาสตร์แต่ต้องการฝึกปฏิบัติด้วยในโอกาสต่อไป

1.3 การประเมินการใช้ชุดฝึกอบรมทางไกล เรื่อง กิจกรรมโครงงานคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา ในด้านความพึงพอใจต่อการอบรม ผลปรากฏว่า ผู้เข้ารับการอบรมมีความพึงพอใจระดับพึงพอใจมากในภาพรวม เมื่อพิจารณาในรายละเอียดพบว่าผู้เข้าอบรมมีความพึงพอใจต่อการอบรมสามลำดับแรก ได้แก่ ประโยชน์ของเอกสารการฝึกอบรม การเปิดโอกาสให้ผู้เข้าอบรมมีส่วนร่วมในกิจกรรมการอบรม และการนำความรู้ไปใช้ประโยชน์ในกิจกรรมการเรียนการสอน ผู้เข้ารับการอบรมมีความมั่นใจในการสร้างตัวอย่างโครงงานสำหรับนักเรียนเป็นลำดับสุดท้าย รายละเอียดของผลการประเมินความพึงพอใจต่อการอบรมแสดงในตารางที่ 3

ตารางที่ 3 ผลการประเมินการใช้ชุดฝึกอบรมทางไกล เรื่อง กิจกรรมโครงงานคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา ในด้านความคิดเห็นและความพึงพอใจต่อการอบรม

ที่	รายการประเมิน	ค่าเฉลี่ย	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	แปลความหมาย
	เรื่องที่ 2 ความคิดเห็นและความพึงพอใจต่อการอบรม			
11	ประโยชน์ของเอกสารการฝึกอบรม	4.35	0.68	มาก
12	ประโยชน์ของใบกิจกรรมประกอบการอบรม	4.19	0.73	มาก
13	ประโยชน์ของสื่อการนำเสนอประกอบการอบรม	4.18	0.72	มาก
14	ความพึงพอใจต่อวิธีการจัดกิจกรรมการอบรม	4.23	0.73	มาก
15	ความพึงพอใจในการถ่ายทอดความรู้ของวิทยากร	4.23	0.73	มาก
16	การเปิดโอกาสให้มีส่วนร่วมในกิจกรรมการอบรม	4.33	0.69	มาก
17	การนำความรู้ไปใช้ประโยชน์ในกิจกรรมการเรียนการสอน	4.32	0.67	มาก
18	ความมั่นใจในการสร้างตัวอย่างโครงงานสำหรับนักเรียน	4.10	0.78	มาก
19	ความมั่นใจในการจัดการเรียนรู้โดยใช้กิจกรรมโครงงาน	4.18	0.73	มาก
20	ความมั่นใจในการเป็นผู้ให้คำแนะนำ/เป็นที่ปรึกษาของนักเรียนในการทำโครงงานคณิตศาสตร์	4.19	0.74	มาก
	รวม	4.23	0.72	มาก

ความคิดเห็นอื่นๆ ต่อการฝึกอบรม มีดังนี้

1. เป็นการอบรมที่จัดกิจกรรมได้น่าสนใจ ไม่เบื่อ ได้เรียนรู้การทำโครงงานอย่างง่าย และ การทำโครงงานคณิตศาสตร์ด้วยการลงมือปฏิบัติ

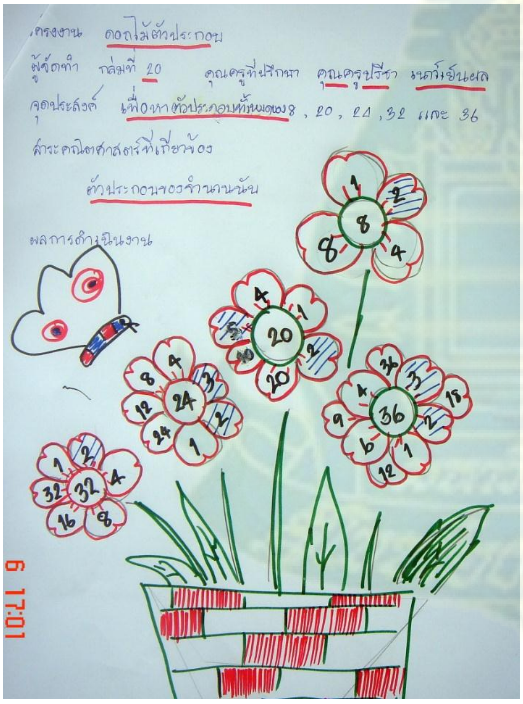
2. การช่วยกันทำโครงงานเป็นกลุ่มทำให้ได้เรียนรู้จากกันและกัน และได้ร่วมมือช่วยกันทำงาน
3. ชอบโครงงานอย่างง่ายมาก น่ารักดี ถ้านักเรียนเริ่มต้นทำโครงงานจากโครงงานอย่างง่ายก็น่าจะประสบความสำเร็จอย่างรวดเร็ว เป็นพื้นฐานไปสู่การทำโครงงานคณิตศาสตร์เต็มรูป
4. ได้เห็นตัวอย่างของการจัดการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญโดยใช้กิจกรรมโครงงาน
5. การสื่อการนำเสนอด้วยโปรแกรมเพาเวอร์พอยต์ และโปรแกรม GSP น่าสนใจมาก ควรเผยแพร่ให้ผู้เข้ารับการอบรมด้วย
6. ต้องการตัวอย่างโครงงานคณิตศาสตร์ที่ได้รับรางวัล เช่น ได้รับรางวัลจากสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์

ตอนที่ 2 การวิเคราะห์ผลการทำกิจกรรมโครงงานคณิตศาสตร์ของครูผู้เข้ารับการอบรม

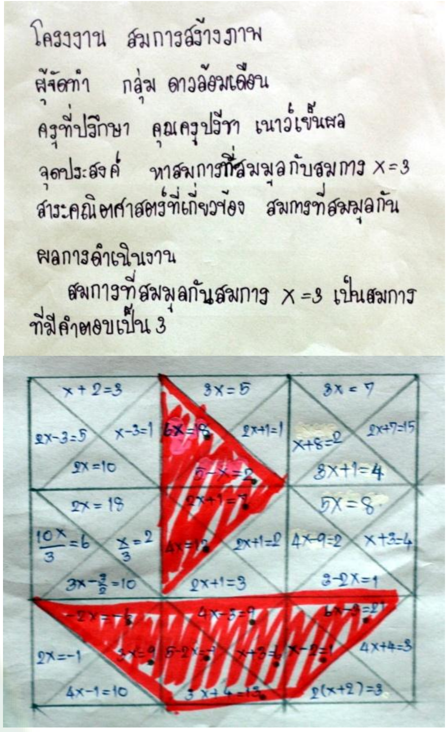
2.1 ผลการทำโครงงานอย่างง่าย

แบบประเมินการทำโครงงานอย่างง่ายอยู่ภายใต้เงื่อนไขให้ผู้เข้าอบรมสมมติตนเองเป็นนักเรียนและทำโครงงานอย่างง่ายเมื่อเรียนจบเนื้อหาเรื่องใดเรื่องหนึ่งแล้ว เป็นโครงงานที่สัมพันธ์กับบทเรียน โดยช่วยกันทำเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 4 คน รวมทั้งหมด 30 กลุ่ม จากการอบรม 3 ครั้ง ครั้งละ 40 คน แบ่งเป็นครั้งละ 10 กลุ่ม โครงงานอย่างง่ายที่ผู้เข้าอบรมจัดทำ แบ่งได้เป็น 5 ประเภท คือ โครงงานอย่างง่ายในรูปแบบฝึกหัด ในรูปเกมหรือกิจกรรมเกี่ยวกับบทเรียน การแสดงวิธีการหรือขั้นตอนการหาคำตอบของโจทย์ การสรุปบทเรียน และการขยายความรู้จากบทเรียน

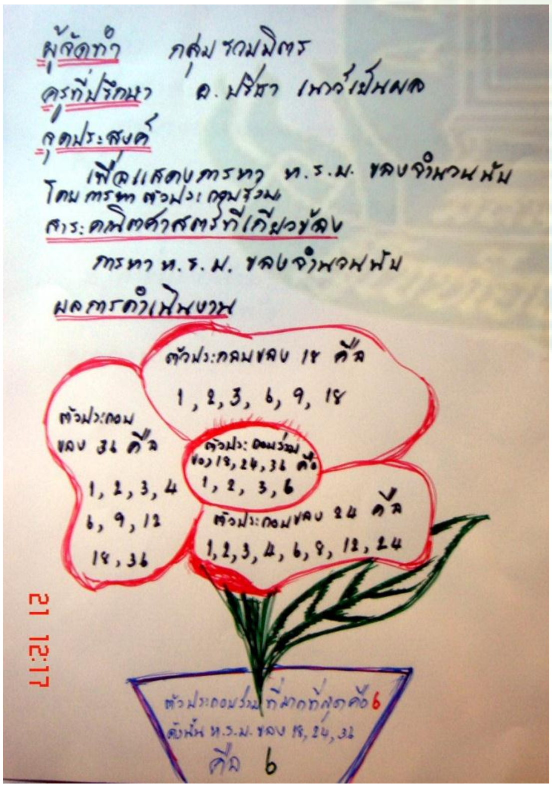
2.1.1 โครงงานอย่างง่ายในรูปแบบฝึกหัด ผู้จัดทำโครงงานสร้างโจทย์เอง และหาคำตอบ เช่น *โครงงานดอกไม้ตัวประกอบ* เป็นการแสดงตัวประกอบทั้งหมดของ 8, 20, 24, 32 และ 36 พร้อมทั้งเน้นจำนวนที่เป็นตัวประกอบเฉพาะ *โครงงานดอกไม้ชวนคิด* แสดงจำนวนสองเต็มสองจำนวนที่มีผลบวกเท่ากับจำนวนที่กำหนด และเว้นที่ว่างไว้ให้ผู้ดูโครงงานคิดต่อว่ามีจำนวนสองเต็มสองจำนวนใดอีกบ้างที่มีผลบวกเท่ากับจำนวนที่กำหนดให้

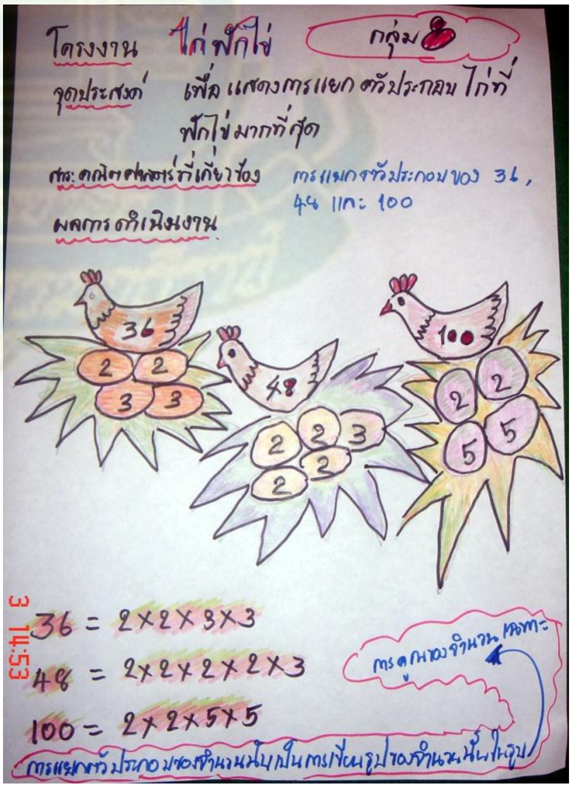


2.1.2 โครงงานอย่างง่ายในรูปเกมหรือกิจกรรม เช่น *โครงงานสมการโดมิโน* ผู้จัดทำโครงงานนำเสนอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และคำตอบในรูปของเกมโดมิโนที่วางด้านที่แสดงสมการต่อกับด้านที่แสดงคำตอบของสมการนั้น ซึ่งในกิจกรรมการเรียนนักเรียนอาจเล่นเกมก่อนแล้วบันทึกผลการเล่นในรูปโครงงานอย่างง่าย *โครงงานสมการสร้างภาพ* เป็นการนำเสนอสมการที่มีคำตอบเท่ากัน เมื่อแรเงาหรือระบายสีแล้วจะได้ภาพที่ซ่อนอยู่ ในที่นี้เป็นภาพเรือใบ



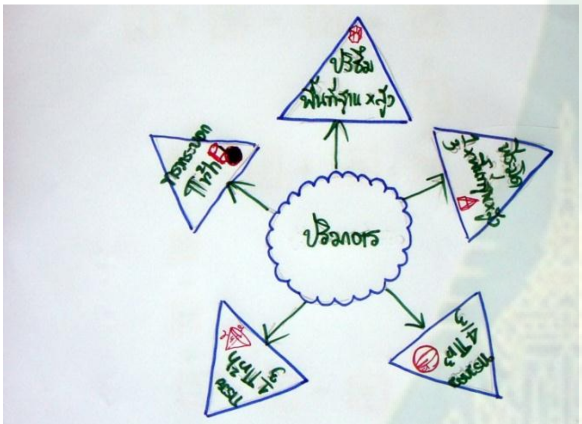
2.1.3 โครงงานอย่างง่ายที่เป็นการแสดงวิธีการหรือขั้นตอนการหาคำตอบของโจทย์ เช่น *โครงงานดอกไม้ ห.ร.ม. ของจำนวนนับ* เริ่มจากการแสดงจำนวนที่เป็นตัวประกอบของ 18, 24 และ 36 หาตัวประกอบร่วม และหาตัวประกอบร่วมที่มากที่สุดของ 18, 24 และ 36 *โครงงานไก่ฟักไข่* ผู้จัดทำโครงงานนำเสนอการแยกตัวประกอบของจำนวนนับที่กำหนดขึ้นเองว่าต้องแสดงในรูปการคูณกันของจำนวนเฉพาะ และสอดแทรกคำถามให้คิดว่า แม่ไก่ตัวใดฟักไข่มากที่สุด ซึ่งหมายถึงจำนวนที่มีจำนวนเฉพาะหลายจำนวนมาคูณกัน

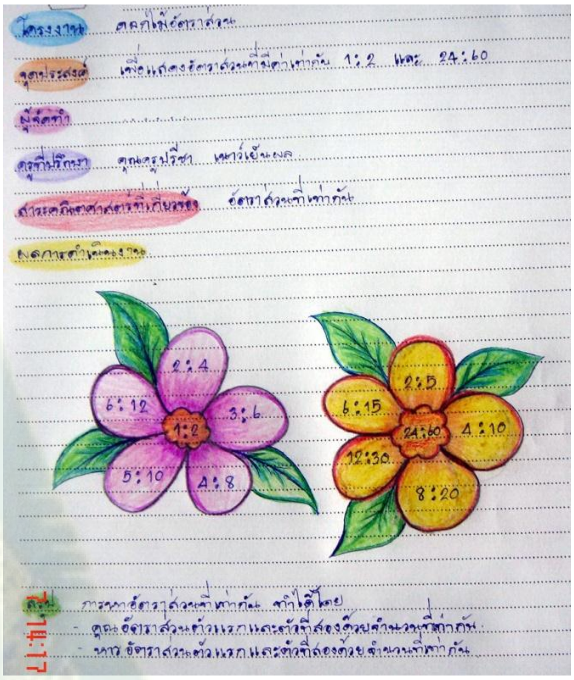




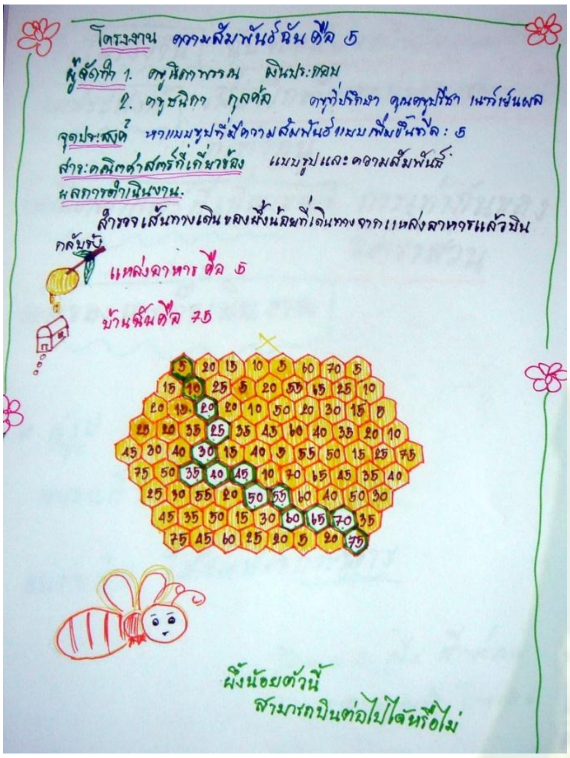
2.1.4 โครงงานอย่างง่ายในลักษณะการสรุปบทเรียน เช่น *โครงงานปริมาตรของทรงสามมิติ* แสดงการสรุปสูตรการหาปริมาตรของทรงสามมิติต่างๆ ได้แก่ ปริซึม ทรงกระบอก พีระมิด กรวย ทรงกลม *โครงงานดอกไม้อัตราส่วน* สรุปวิธีการหาอัตราส่วนที่เท่ากันว่าทำได้โดยคูณหรือหารจำนวนแรกและจำนวนที่สองของอัตราส่วนด้วยจำนวนที่เท่ากัน

โครงงาน *สูตรปริมาตรทรงสามมิติ*
จุดประสงค์ *เพื่อสรุปสูตรการหาปริมาตรทรงสามมิติ*
สาระคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง *ปริมาตรทรงสามมิติ*
ผลการดำเนินงาน





2.1.5 โครงงานที่ขยายฐานความรู้จากบทเรียน เช่น *โครงงานความสัมพันธ์ฉันคือ 5* แสดงแบบรูปของจำนวนนับที่เพิ่มขึ้นครั้งละ 5 ซึ่งสามารถขยายต่อไปสู่เรื่อง ลำดับเลขคณิต โครงงานตาชั่งสัมพันธ์ แสดงความสัมพันธ์ของผลคูณของจำนวนนับสองจำนวนซึ่งเท่ากับผลคูณของ ค.ร.น. และ ห.ร.ม. ของจำนวนนับสองจำนวนนั้น



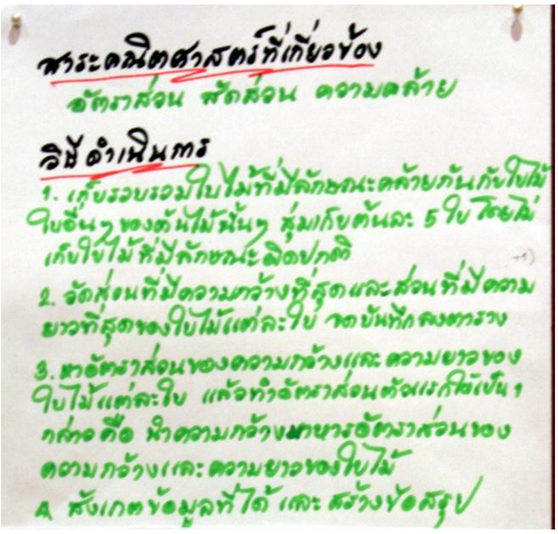
2.2 ผลการทำโครงงานคณิตศาสตร์

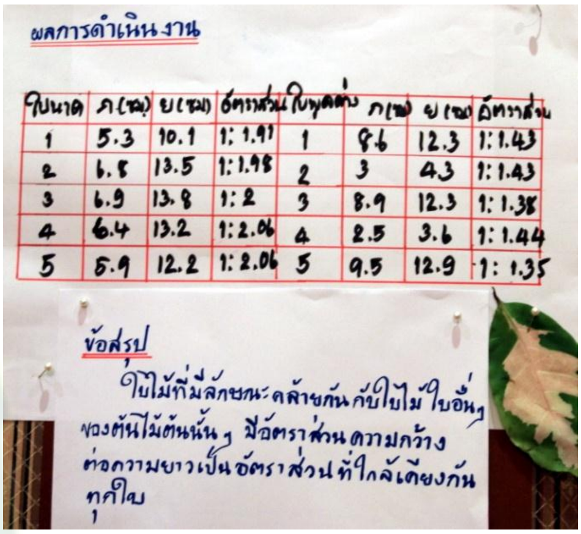
ในช่วงสุดท้ายของการอบรมผู้วิจัยประเมินผลการอบรมโดยให้ผู้เข้าอบรมทำโครงงานคณิตศาสตร์จากเค้าโครงของโครงงานที่กำหนดให้ทั้งหมด 6 โครงงาน โดยให้เลือกทำกลุ่มละ 1 โครงงาน ใช้เวลาทำ 45 นาที และนำเสนอ 5 นาที การวิเคราะห์ผลการทำโครงงานในเชิงพรรณนาผู้วิจัยขอนำเสนอดังต่อไปนี้

2.2.1 โครงงานสำรวจหาอัตราส่วนของใบไม้

ผู้วิจัยนำเสนอเค้าโครงของโครงงานเกี่ยวกับการสังเกตใบไม้ของต้นไม้ต้นเดียวกันซึ่งพบว่ามีรูปร่างลักษณะที่คล้ายกันมาก กระตุ้นให้สนใจที่จะนำความรู้ทางคณิตศาสตร์มาอธิบายลักษณะของใบไม้ที่คล้ายกัน ซึ่งในโครงงานนี้เสนอให้ใช้อัตราส่วนของความกว้างและความยาวของใบ โดยเปรียบเทียบอัตราส่วนของความกว้างและความยาวของใบไม้ที่คล้ายกัน ในโครงงานนี้กำหนด**สมมติฐานว่า** อัตราส่วนของความกว้างและความยาวของใบไม้ที่คล้ายกันเป็นอัตราส่วนที่ใกล้เคียงกัน

ผู้จัดทำโครงงานได้เก็บรวบรวมใบไม้ที่มีลักษณะคล้ายกันของต้นไม้ต้นเดียวกันสองชนิด โดยไม่เก็บใบไม้ที่มีลักษณะผิดปกติ วัดส่วนที่มีความกว้างที่สุด และส่วนที่มีความยาวที่สุดของใบไม้แต่ละใบ จดบันทึกลงตาราง หาอัตราส่วนของความกว้างและความยาวของใบไม้แต่ละใบ แล้วทำอัตราส่วนตัวแรกให้เป็น 1 กล่าวคือ นำความกว้างมาหารอัตราส่วนของความกว้างและความยาวของใบไม้ แต่ละกลุ่มได้ผลสรุปสอดคล้องกันว่า “อัตราส่วนของความกว้างและความยาวของใบไม้ที่คล้ายกัน เมื่อทำอัตราส่วนจำนวนแรกให้เป็น 1 แล้วจะได้อัตราส่วนจำนวนที่สองใกล้เคียงกัน”

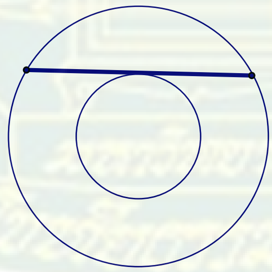




ในกิจกรรมนี้ได้มีการอภิปรายเพิ่มเติมเกี่ยวกับความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องได้แก่ อัตราส่วน ซึ่งอัตราส่วนนั้นไม่ใช่จำนวน ไม่สามารถนำมาเปรียบเทียบกันได้ว่าอัตราส่วนใดมากกว่าหรือน้อยกว่ากัน แต่สามารถนำมาเปรียบเทียบกันว่าเท่ากันหรือไม่เท่ากัน ในโครงงานนี้มีการทำจำนวนแรกของอัตราส่วนให้เป็น 1 แล้วเปรียบเทียบกันเฉพาะจำนวนที่สองของอัตราส่วนซึ่งปรากฏว่ามีค่าใกล้เคียงกัน

2.2.2 โครงงานพื้นที่ของวงแหวน

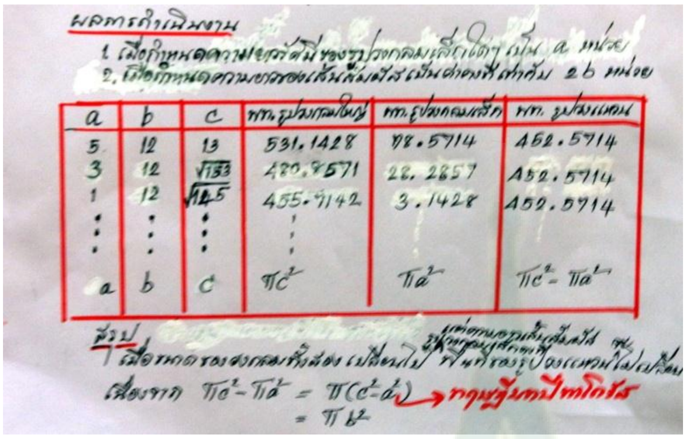
ผู้วิจัยนำเสนอเค้าโครงของโครงงานเกี่ยวกับพื้นที่ของวงแหวนซึ่งเป็นพื้นที่ของรูปเรขาคณิตที่อยู่ระหว่างรูปวงกลมสองวงที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน พื้นที่ของรูปวงแหวนจึงหาได้จากผลต่างของรูปวงกลมสองวงที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกันนั้น ถ้าสร้างเส้นสัมผัสวงกลมรูปเล็กของรูปวงแหวนโดยให้จุดปลายทั้งสองข้างของเส้นสัมผัสอยู่ที่เส้นรอบวงของวงกลมรูปใหญ่ ดังรูป



เมื่อกำหนดความยาวของเส้นสัมผัสดังกล่าวนี้ให้เท่ากับค่าคงที่ค่าหนึ่งแล้ว ถ้าขนาดของวงกลมทั้งสองเปลี่ยนไป จะมีผลต่อพื้นที่ของรูปวงแหวนหรือไม่ อย่างไร ให้ผู้เข้าอบรมศึกษาผลที่เกิดขึ้นและนำเสนอผลในรูปโครงงาน

ผู้จัดทำโครงงานนำคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการหาพื้นที่ของรูปวงกลม และทฤษฎีบทพีทาโกรัส มาใช้ในการศึกษา โดยสร้างรูปวงกลมให้มีรัศมียาวขนาดต่างๆ เช่น 5, 3, 1 หน่วย สร้างเส้นสัมผัสให้มีความยาวคงที่ เช่น 12 หน่วย ให้จุดสัมผัสเป็นจุดกึ่งกลางของเส้นสัมผัส สร้างรูปวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกันกับ

วงกลมวงแรกให้ผ่านจุดปลายทั้งสองข้างของเส้นสัมผัส คำนวณหารัศมีของรูปวงกลมรูปใหญ่โดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส คำนวณหาพื้นที่ของรูปวงแหวน และวิเคราะห์พื้นที่ของรูปวงแหวนที่หาได้ ดังตัวอย่างผลการดำเนินงาน

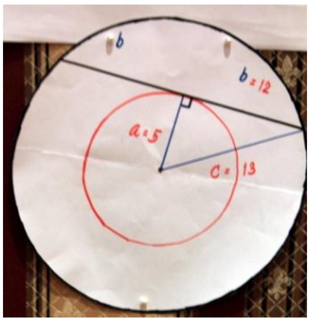

ผลการดำเนินงาน

a	b	c	พท.รูปวงกลมใหญ่	พท.รูปวงกลมเล็ก	พท.รูปวงแหวน
5	12	13	531.1428	78.5714	452.5714
3	12	$\sqrt{153}$	480.8571	28.2857	452.5714
1	12	$\sqrt{145}$	455.7142	3.1428	452.5714
⋮	⋮	⋮	⋮		
a	b	c	πc^2	πa^2	$\pi c^2 - \pi a^2$

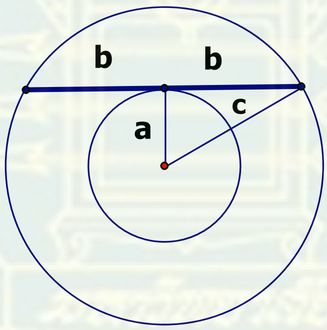
สรุป

$\pi c^2 - \pi a^2 = \pi(c^2 - a^2)$ → ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$= \pi b^2$



จากตารางจะเห็นว่าพื้นที่ของรูปวงแหวนเป็นค่าคงที่ไม่เปลี่ยนแปลง จากนั้นผู้จัดทำโครงงานได้อธิบายเป็นกรณีทั่วไปโดยสร้างรูปวงกลมวงหนึ่งรัศมียาว a หน่วย สร้างเส้นสัมผัสยาว 2b หน่วย ให้จุดสัมผัสเป็นจุดกึ่งกลางของเส้นสัมผัส สร้างรูปวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกันกับวงกลมวงแรกให้ผ่านจุดปลายทั้งสองข้างของเส้นสัมผัส

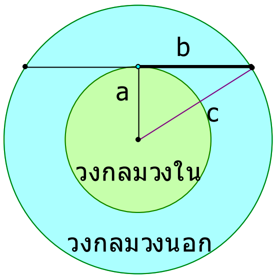


โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส ความยาวรัศมีของรูปวงกลมรูปใหญ่ (c) ความยาวรัศมีของรูปวงกลมรูปเล็ก (a) และ ความยาวของครึ่งหนึ่งของเส้นสัมผัสมีความสัมพันธ์กันดังนี้ $c^2 = a^2 + b^2$ หรือ $c^2 - a^2 = b^2$

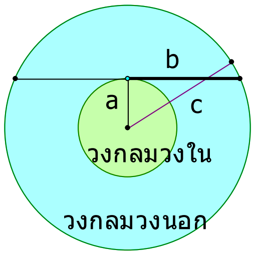
จะได้พื้นที่ของรูปวงแหวน เท่ากับ $\pi c^2 - \pi a^2 = \pi(c^2 - a^2) = \pi b^2$

ดังนั้นพื้นที่ของรูปวงแหวนขึ้นอยู่กับค่า b ซึ่งเป็นความยาวของเส้นสัมผัสเท่านั้น

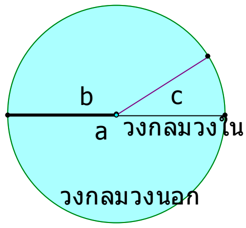
ในการนำเสนอโครงงานนี้ บางกลุ่มนำเสนอโดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต แสดงการเปลี่ยนแปลงค่าของพารามิเตอร์ a และ c ในขณะที่กำหนดให้ b เป็นค่าคงที่



พื้นที่ วงกลมวงนอก = 35.63 ซม.^{2}
พื้นที่ วงกลมวงใน = 10.58 ซม.^{2}
พื้นที่วงแหวน = 25.05 ซม.^{2}



พื้นที่ วงกลมวงนอก = 29.98 ซม.^{2}
พื้นที่ วงกลมวงใน = 4.93 ซม.^{2}
พื้นที่วงแหวน = 25.05 ซม.^{2}



พื้นที่ วงกลมวงนอก = 25.05 ซม.^{2}
พื้นที่ วงกลมวงใน = 0.00 ซม.^{2}
พื้นที่วงแหวน = 25.05 ซม.^{2}

ผู้เข้าอบรมระบุว่าสิ่งที่น่าสนใจคือ เมื่อรัศมีของวงกลมวงในเป็น 0 พื้นที่ของวงแหวนก็คือ พื้นที่ของวงกลมวงใหญ่ที่มีรัศมียาว b หน่วย นั่นเอง

2.2.3 โครงงานรูปเรขาคณิตที่คล้ายกันบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

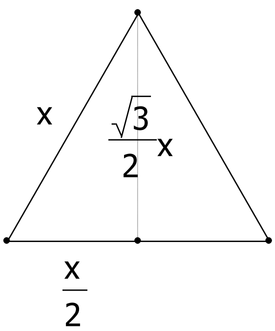
ในกิจกรรมการเรียนรู้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ครูได้จัดกิจกรรมให้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาเรียนรู้ว่า "ผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก เท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก" กล่าวคือ ทราบว่า " $a^2 + b^2 = c^2$ เมื่อ a และ b เป็นความยาวของด้านประกอบมุมฉาก และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก" รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นรูปที่คล้ายกัน จึงน่าสนใจต่อไปว่า ถ้ารูปที่อยู่บนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป็นรูปที่คล้ายกัน พื้นที่ของรูปที่คล้ายกันนี้จะยังคงมีสมบัติเช่นเดียวกันกับรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือไม่ ผู้เข้ารับการอบรมได้นำเสนอในรูปโครงงานคณิตศาสตร์ โดยมีจุดประสงค์ของโครงงานว่า เพื่อแสดงความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปคล้ายบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และบางกลุ่มกำหนดสมมติฐานด้วยว่า พื้นที่ของรูปคล้ายบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีความสัมพันธ์กันตามทฤษฎีบทพีทาโกรัส แต่ละกลุ่มศึกษาสมบัติของรูปคล้ายบนด้านทั้งสามด้านของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากกลุ่มละสอง 2 – 3 รูป ผู้เข้าอบรมได้แลกเปลี่ยนเรียนรู้กันในขั้นตอนของการนำเสนอ

ในการนำเสนอผลการดำเนินงาน เช่น ในกรณีการแสดงความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เริ่มต้นจากการอธิบายการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าดังนี้

ถ้ารูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามีความยาวด้านละ x หน่วย

มีความสูง $\frac{\sqrt{3}}{2}$ x หน่วย

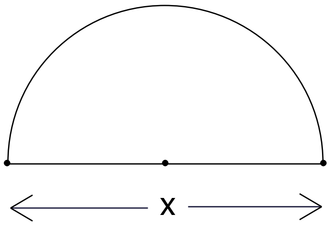
มีพื้นที่เท่ากับ $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ ตารางหน่วย



โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส $a^2 + b^2 = c^2$

เมื่อคูณทั้งสองข้างของสมการด้วย $\frac{\sqrt{3}}{4}$ จะได้ $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$

ดังนั้นจะได้ว่า “ผลบวกของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าบนด้านประกอบมุมฉาก เท่ากับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าบนด้านตรงข้ามมุมฉาก” ซึ่งเป็นแนวทางที่ถูกต้อง แต่ก็มีบางกลุ่มนำเสนอในทิศทางตรงข้ามกัน หลังจากที่ได้อธิบายการหาพื้นที่ของรูปเรขาคณิตแล้ว เช่น กรณีการแสดงว่า “ผลบวกของพื้นที่ของรูปครึ่งวงกลมบนด้านประกอบมุมฉาก เท่ากับพื้นที่ของรูปครึ่งวงกลมบนด้านตรงข้ามมุมฉาก”



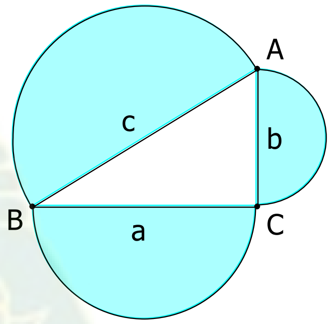
วงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว x หน่วย

มีพื้นที่เท่ากับ $\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$ ตารางหน่วย

ดังนั้นครึ่งวงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว x หน่วย

มีพื้นที่เท่ากับ $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{8}\right)x^2$ ตารางหน่วย ในส่วนนี้แสดงได้ถูกต้อง

ต่อไปนำเสนอดังนี้



$$\left(\frac{\pi}{8}\right)a^2 + \left(\frac{\pi}{8}\right)b^2 = \left(\frac{\pi}{8}\right)c^2$$

หารทั้งสองข้างด้วย $\left(\frac{\pi}{8}\right)$

จะได้ $a^2 + b^2 = c^2$

ดังนั้น ทฤษฎีบทพีทาโกรัสเป็นจริง ในกรณีที่รูปบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป็นรูปครึ่งวงกลม

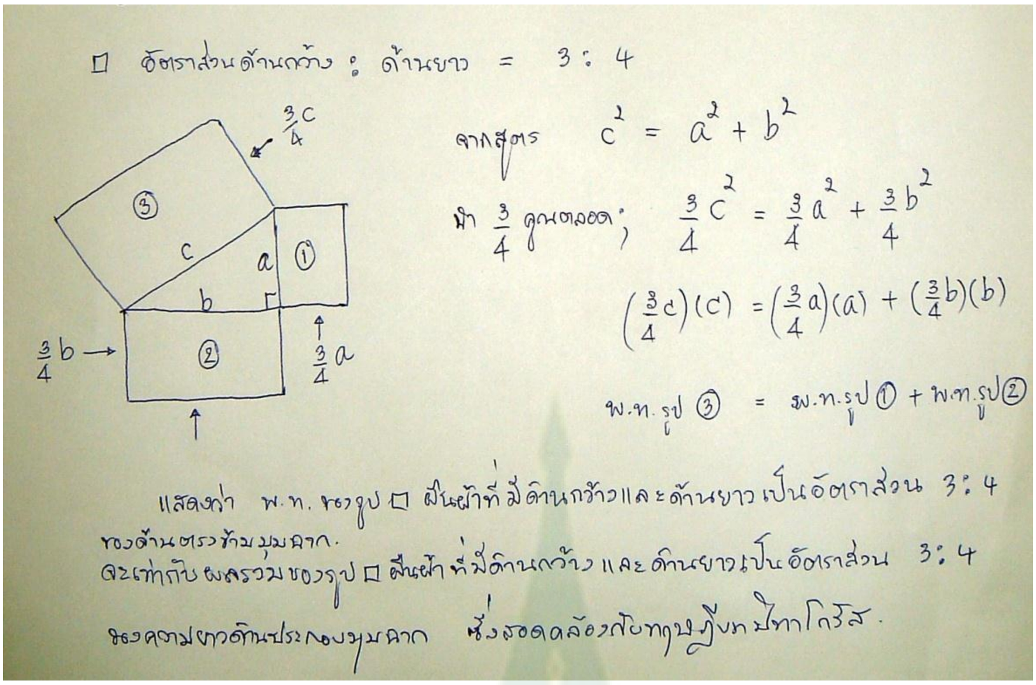
การนำเสนอเช่นนี้**ไม่**ถูกต้อง เพราะนำผล คือ $\left(\frac{\pi}{8}\right)a^2 + \left(\frac{\pi}{8}\right)b^2 = \left(\frac{\pi}{8}\right)c^2$ ซึ่งเป็นข้อความที่จะต้องพิสูจน์ว่าเป็นจริง นำขึ้นมาเป็นเหตุ และนำทฤษฎีบทซึ่งต้องนำมาใช้อ้างอิงไปแสดงเป็นผล เมื่อมีการชี้แจงและอภิปรายร่วมกันก็มีการแก้ไขให้ถูกต้อง ดังนี้

โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส $a^2 + b^2 = c^2$

เมื่อคูณทั้งสองข้างของสมการด้วย $\left(\frac{\pi}{8}\right)$ จะได้ $\left(\frac{\pi}{8}\right)a^2 + \left(\frac{\pi}{8}\right)b^2 = \left(\frac{\pi}{8}\right)c^2$

ดังนั้น “ผลบวกของพื้นที่ของรูปครึ่งวงกลมบนด้านประกอบมุมฉาก เท่ากับพื้นที่ของรูปครึ่งวงกลมบนด้านตรงข้ามมุมฉาก”

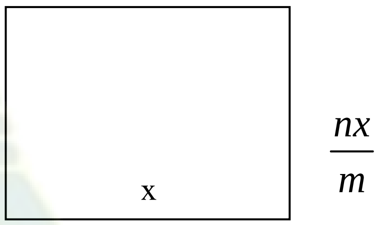
การนำเสนอความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปเรขาคณิตที่คล้ายกันบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่น่าสนใจ เช่น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่คล้ายกันบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยนำเสนอเป็นกรณีเฉพาะ



บางกลุ่มสามารถนำเสนอเป็นกรณีทั่วไป โดยให้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่คล้ายกันทั้งสามรูปมีอัตราส่วนของความยาว ต่อความกว้างเป็น m : n ถ้ารูปสี่เหลี่ยมมุมฉากมีความยาว x หน่วย

จะมีความกว้างเท่ากับ $\frac{nx}{m}$ หน่วย

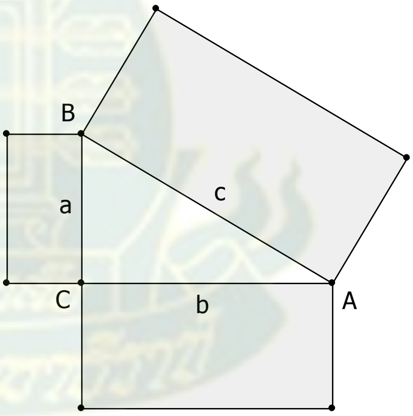
และมีพื้นที่เท่ากับ $\frac{nx^2}{m}$ ตารางหน่วย



โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส โกรัส $a^2 + b^2 = c^2$

เมื่อคูณทั้งสองข้างของสมการด้วย $\frac{n}{m}$

จะได้ $\frac{na^2}{m} + \frac{nb^2}{m} = \frac{nc^2}{m}$



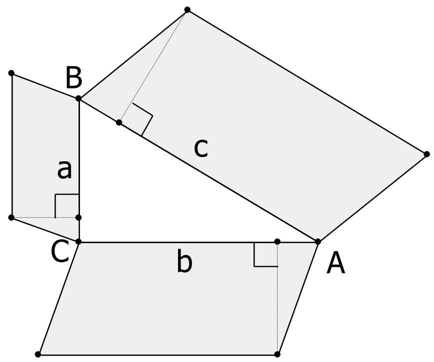
ดังนั้น “สำหรับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีอัตราส่วนของความยาวต่อความกว้างเป็น m : n ผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากบนด้านประกอบมุมฉาก เท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากบนด้านตรงข้ามมุมฉาก”

เนื่องจากการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีความเกี่ยวข้องกับพารามิเตอร์สองตัว คือ ความกว้างและความยาว แต่ว่าความยาวของแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีพารามิเตอร์เพียงตัวเดียว จึงต้องกำหนดให้ความกว้างอยู่ในเทอมของความยาวโดย

อาศัยอัตราส่วนที่เท่ากันของความยาวและความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่คล้ายกัน แนวคิดนี้ผู้เข้ารับการอบรมสามารถบอกแนวทางได้ว่าสามารถนำไปใช้กับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่คล้ายกัน ด้วยการกำหนดให้รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่คล้ายกัน มีอัตราส่วนของความยาวฐานต่อความสูงเป็นอัตราส่วนที่เท่ากัน เช่น

"ผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีอัตราส่วนของความยาวฐานต่อความสูงเป็น 1 : x บนด้านประกอบมุมฉาก เท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีอัตราส่วนของความยาวฐานต่อความสูงเป็น 1 : x บนด้านตรงข้ามมุมฉาก"

รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีอัตราส่วนของความยาวฐานต่อความสูงเป็น 1 : x



ถ้าฐานยาว a หน่วย จะได้ความสูง ax หน่วย และมีพื้นที่ a^2x

ถ้าฐานยาว b หน่วย จะได้ความสูง bx หน่วย และมีพื้นที่ b^2x

ถ้าฐานยาว c หน่วย จะได้ความสูง cx หน่วย และมีพื้นที่ c^2x

โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส $a^2 + b^2 = c^2$

เมื่อคูณทั้งสองข้างของสมการด้วย x จะได้ $xa^2 + xb^2 = xc^2$

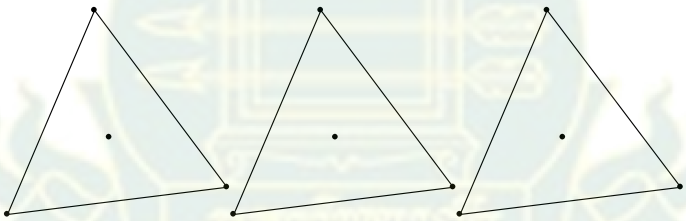
2.2.4 โครงงาน ป้ายโฆษณาสามหน้า

ผู้วิจัยได้นำเสนอเค้าโครงของโครงงานป้ายโฆษณาสามหน้า พร้อมภาพแผ่นป้ายนิทรรศการพลังงานแสงอาทิตย์ของท้องฟ้าจำลอง ที่มีการหมุนพื้นของป้ายซึ่งตัดแบ่งเป็นซี่ ๆ ให้สิ่งที่ต้องการนำเสนอใหม่ปรากฏขึ้นมาแทนสิ่งเดิม แผ่นป้ายด้านเดียวสามารถนำเสนอเรื่องราวได้ถึงสามฉาก ให้ผู้เข้าอบรมจัดทำโครงงานเพื่อศึกษาว่าแผ่นป้ายโฆษณาในลักษณะนี้มีหลักการทำงานอย่างไร และสามารถนำความรู้ใดทางคณิตศาสตร์มาอธิบาย

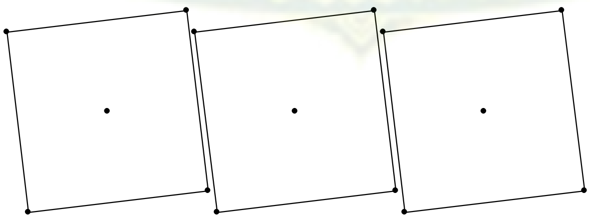
ในการนำเสนอโครงงานผู้เข้าอบรมได้สร้างแบบจำลองของป้ายโฆษณาสามหน้าเป็นปริซึมฐานรูป

สามเหลี่ยมด้านเท่า ทำด้วยกระดาษแสดงการหมุนให้เห็นว่ามีการเปลี่ยนหน้าของแผ่นป้ายอย่างไร ปริซึมฐานรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าสามารถหมุนเปลี่ยนหน้าได้ แต่ว่าปริซึมที่มีฐานเป็นอย่างอื่น เช่น ปริซึมฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่วางชิดกันไม่สามารถหมุนปริซึม จึงไม่สามารถนำมาสร้างเป็นป้ายโฆษณาที่หมุนเปลี่ยนหน้าได้

นอกจากนี้ผู้เข้าอบรมบางกลุ่มได้นำเสนอโดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต (GSP) แสดงการทำงานของป้ายโฆษณาสามหน้าทำด้วยปริซึมที่มีฐานเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า และแสดงให้เห็นอุปสรรคหากทำด้วยปริซึมที่มีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



ปริซึมฐานสามเหลี่ยม



ปริซึมฐานสี่เหลี่ยม

ผู้จัดทำโครงงานป้ายโฆษณาสามหน้าแสดงความคิดเห็นว่า โครงงานนี้ทำให้เห็นตัวอย่างของการนำคณิตศาสตร์ไปอธิบายสิ่งที่มีอยู่รอบตัว แสดงการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ทำให้เห็นประโยชน์และคุณค่าของคณิตศาสตร์

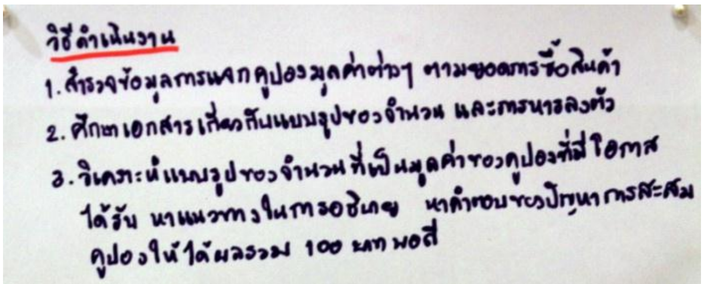
2.2.5 โครงงาน คูปอง 100 บาท

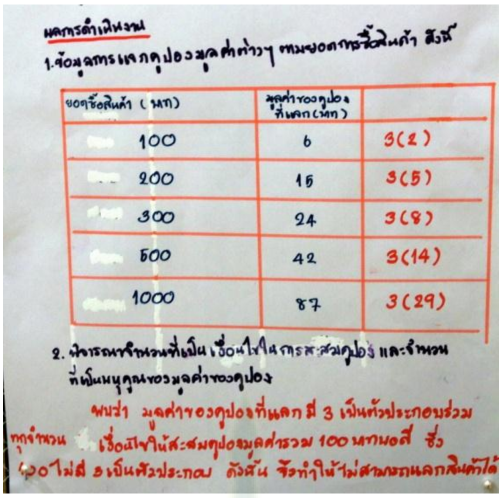
ผู้วิจัยนำเสนอเค้าโครงของโครงงานเป็นสถานการณ์สมมติว่ามีร้านค้าแห่งหนึ่งในหมู่บ้านจัดกิจกรรมส่งเสริมการขาย โดยแจกคูปองมูลค่าต่าง ๆ ให้กับลูกค้าตามยอดการซื้อสินค้า และกำหนดเงื่อนไขว่า เมื่อลูกค้าสะสมคูปองได้มูลค่ารวม 100 บาทพอดี จะสามารถนำมาแลกซื้อสินค้าแทนเงินสด 100 บาทได้ มีผู้มาซื้อสินค้ามากมาย แต่ไม่ปรากฏว่ามีลูกค้าคนใดสะสมคูปองได้มูลค่ารวม 100 บาทพอดี ทำได้แค่เพียงมูลค่าใกล้เคียงเท่านั้น ทำให้เกิดข้อสงสัยว่า เป็นเพราะเหตุใด ให้ผู้เข้าอบรมศึกษาข้อมูลการแจกคูปอง และจัดทำคำอธิบายโดยนำเสนอในรูปโครงงาน

ข้อมูลการแจกคูปองมูลค่าต่าง ๆ ตามยอดการซื้อสินค้า เป็นดังนี้

ยอดซื้อสินค้า (บาท)	มูลค่าของคูปองที่แจก(บาท)
100	6
200	15
300	24
500	42
1000	87

กลุ่มผู้จัดทำโครงงานหามูลค่าของคูปองที่เป็นไปได้ เช่น 6 บาท 12 บาท (ซื้อสินค้า 100 บาท 2 ครั้ง) 15 บาท 18 บาท (ซื้อสินค้า 100 บาท 2 ครั้ง) 21 บาท (ซื้อสินค้า 100 บาท 1 ครั้ง และซื้อสินค้า 200 บาท 1 ครั้ง) 24 บาท 27 บาท 30 บาท … ในระยะแรกได้พยามยามนำจำนวนเหล่านี้มารวมกันให้ได้ผลรวมเท่ากับ 100 บาท แต่ไม่สามารถทำได้ ต่อมาเริ่มสังเกตพบว่า มูลค่าของคูปองที่สะสมได้ทุกจำนวนมี 3 เป็นตัวประกอบ แต่ว่า 3 ไม่เป็นตัวประกอบของ 100 ดังนั้น เป็นไปไม่ได้ที่จะสะสมคูปองให้มีมูลค่ารวม 100 บาท พอดี





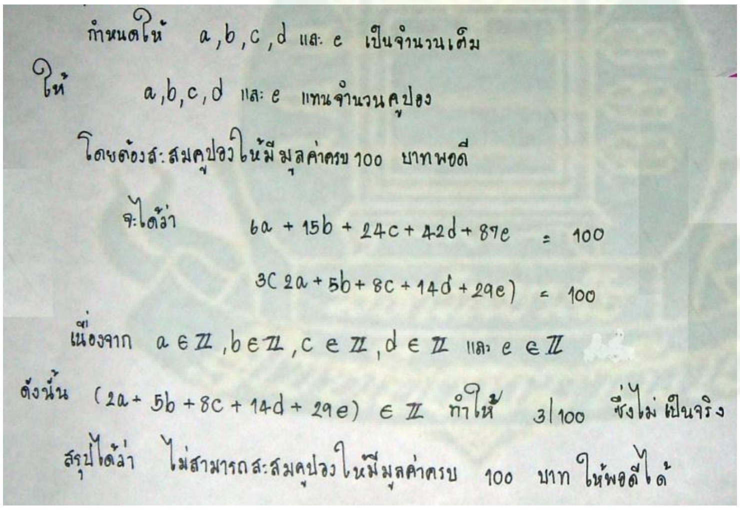
ผู้จัดทำโครงงานบางกลุ่ม มีวิธีนำเสนอที่ชัดเจนขึ้น โดยให้ a, b, c , d และ e เป็นจำนวนคูปองที่มีมูลค่า 6, 15, 24, 42 และ 87 บาท ตามลำดับ

สมมติให้ $6a + 15b + 24c + 42d + 87e = 100$

$$3(2a + 5b + 8c + 14d + 29e) = 100$$

เนื่องจาก $2a + 5b + 8c + 14d + 29e$ เป็นจำนวนนับ หมายความว่า 3 คูณกับจำนวนนับ ได้ 100 ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้นที่สมมติให้ $6a + 15b + 24c + 42d + 87e = 100$ จึงเป็นไปไม่ได้ นั่นคือเป็นไปไม่ได้ที่จะสะสมคูปองให้มีมูลค่ารวม 100 บาท พอดี

การนำเสนอของผู้จัดทำโครงงานกลุ่มนี้ใช้วิธีพิสูจน์แบบหาข้อขัดแย้ง (contradiction) แสดงดังภาพ



2.2.6 โครงงานกลไพ่กับคณิตศาสตร์

ไพ่หนึ่งสำรับประกอบด้วยไพ่ทั้งหมด 52 ใบ แบ่งได้เป็น 4 กลุ่ม ตามรูปหรือดอกของไพ่คือ กลุ่มที่ 1 โพดำ กลุ่มที่ 2 โพแดง กลุ่มที่ 3 ข้าวหลามตัด และ กลุ่มที่ 4 ดอกจิก แต่ละกลุ่มมี 13 ใบ มีแต้มเป็น A , 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K สำหรับ A คิดเป็น 1 แต้ม สำหรับ J, Q, K คิดเป็นใบละ 11, 12, 13 แต้ม ตามลำดับ กลไพ่เป็นกิจกรรมที่น่าสนใจ สร้างความพิศวงให้กับผู้ชมไม่น้อย กลไพ่บางอย่างมีความ

มหัศจรรย์อยู่ในตัวเอง ผู้วิจัยนำเสนอกลไพ่ในรูปเค้าโครงของโครงงาน โดยนำเสนอกลไพ่ให้ผู้อบรมศึกษาทดลองเล่น และวิเคราะห์การทำงานของกลไพ่ หาคำอธิบายโดยใช้สมบัติต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์

ตัวอย่างกลไพ่ที่นำเสนอเป็น กลทายแต้มและดอกของไพ่

ผู้แสดงให้ผู้ชมดำเนินการดังนี้

1) *หยิบไพ่ใบหนึ่งจากสำรับ*
2) *คูณแต้มของไพ่ด้วย 5*
3) *บวกผลลัพธ์ที่ได้ด้วย 6*
4) *คูณผลลัพธ์ที่ได้ด้วย 2*
5) *บวกด้วยหมายเลขของกลุ่มไพ่*
6) *บอกผลลัพธ์กับผู้แสดง*

ผู้แสดงสามารถบอกผู้ชมได้ว่า ไพ่ใบนั้นเป็นไพ่กลุ่มใดและมีแต้มเท่าไร

ผู้จัดทำโครงงานนำเสนอแนวคิดในการอธิบายแบ่งได้เป็นสองวิธีคือ

1) **ใช้การสมมติไพ่ที่หยิบอย่างเป็นระบบ** เช่น หยิบไพ่กลุ่มโพดำ คิดคำนวณตามขั้นตอนแล้วศึกษาความเชื่อมโยงของผลการคิดคำนวณกับไพ่ที่หยิบทั้งส่วนที่เป็นแต้มและดอกของไพ่ โดยนำเสนอในรูปตาราง

ไพ่โพดำที่หยิบ	A	2	3	4	5	…	J(11)	Q(12)	K(13)
ผลลัพธ์	23	33	43	53	63	…	123	133	143

พบว่า เลขโดดในหลักหน่วยของผลลัพธ์เป็น 3 ทั้งหมด ซึ่งมากกว่าหมายเลขของกลุ่มไพ่หรือดอกไพ่อยู่ 2 เลขโดดในหลักสิบมากกว่าแต้มของไพ่ที่หยิบอยู่ 1 เสมอ ต่อไปทดลองหยิบไพ่กลุ่มโพแดง คิดคำนวณตามขั้นตอนแล้วศึกษาความเชื่อมโยงของผลการคิดคำนวณกับไพ่ที่หยิบทั้งส่วนที่เป็นแต้มและดอกของไพ่ โดยนำเสนอในรูปตาราง

ไพ่โพแดงที่หยิบ	A	2	3	4	5	…	J(11)	Q(12)	K(13)
ผลลัพธ์	24	34	44	54	64	…	124	134	144

พบว่า เลขโดดในหลักหน่วยของผลลัพธ์เป็น 4 ทั้งหมด ซึ่งมากกว่าหมายเลขของกลุ่มไพ่หรือดอกไพ่อยู่ 2 เลขโดดในหลักสิบมากกว่าแต้มของไพ่ที่หยิบอยู่ 1 เสมอ ต่อไปแสดงตารางการหยิบไพ่ข้าวหลามตัดและไพ่ดอกจิกได้ข้อค้นพบในทำนองเดียวกัน และได้ข้อสรุปว่า “ไม่ว่าจะหยิบไพ่ใบใดเมื่อคิดคำนวณตามขั้นตอนแล้วจะได้ว่า เลขโดดในหลักหน่วยของผลลัพธ์มากกว่าหมายเลขของกลุ่มไพ่หรือดอกไพ่อยู่ 2

และเลขโดดในหลักสิบมากกว่าแต้มของไพ่ที่หยิบอยู่ 1 เสมอ” จึงนำผลนี้ไปใช้ทายการหยิบไพ่ กล่าวคือ “จากผลลัพธ์ที่ผู้เล่นบอก เมื่อลบเลขโดดในหลักหน่วยด้วย 2 จะได้หมายเลขของกลุ่มไพ่ และเมื่อลบเลขโดดในหลักสิบด้วย 1 จะได้แต้มของไพ่”

2) **ใช้ตัวแปร** โดยสมมติตัวแปรตัวหนึ่งแทนแต้มของไพ่ (x) และสมมติตัวแปรอีกตัวหนึ่งแทนดอกของไพ่ (y) จากนั้นวิเคราะห์พหุนามที่เป็นผลลัพธ์ ดังนี้

จากกลทายไพ่ที่ผู้แสดงให้ผู้ชมดำเนินการ

1) หยิบไพ่ใบหนึ่งจากสำรับ	x
2) คูณแต้มของไพ่ด้วย 5	$5x$
3) บวกผลลัพธ์ที่ได้ด้วย 6	$5x + 6$
4) คูณผลลัพธ์ที่ได้ด้วย 2	$2(5x + 6) = 10x + 12$
5) บวกด้วยหมายเลขของกลุ่มไพ่	$10x + 12 + y$
6) บอกผลลัพธ์กับผู้แสดง	จัดรูปใหม่เป็น $10x + y + 12$

จากผลลัพธ์ที่ได้เมื่อลบด้วย 12 จะได้ $10x + y$ แสดงว่า y เป็นจำนวนในหลักหน่วย และ x เป็นจำนวนในหลักสิบขึ้นไป นั่นคือ เมื่อผู้ทายนำผลลัพธ์ที่ผู้เล่นบอกมาลบด้วย 12 ก็จะทราบแต้มและดอกของไพ่ที่ผู้เล่นหยิบ

ในการนำเสนอโครงงานนี้ผู้จัดทำนำเสนอโดยให้ผู้ฟังมีส่วนร่วมโดยให้เป็นผู้เล่นกลทายไพ่ และผู้จัดทำเป็นผู้ทาย ผู้จัดทำโครงงานอธิบายเพิ่มเติมว่า แนวคิดในการใช้ตัวแปรและพหุนามในการวิเคราะห์กลทายไพ่ สามารถนำไปใช้ในการวิเคราะห์และสร้างกลอื่นๆ ทางคณิตศาสตร์

ผลการวิเคราะห์การทำโครงงานคณิตศาสตร์ในภาพรวม ปรากฏว่าผู้เข้าอบรมสามารถนำเสนอวิธีดำเนินงานได้สอดคล้องกับจุดประสงค์ของโครงงาน นำเสนอผลการดำเนินงานได้ครบถ้วนตามจุดประสงค์ คณิตศาสตร์ที่นำเสนอในผลการดำเนินงานมีความถูกต้อง ชัดเจน เข้าใจง่าย มีวิธีการแสดงผลการดำเนินงานที่น่าสนใจ มีวิธีการนำเสนอโครงงานต่อผู้ฟังได้น่าสนใจ ตอบข้อซักถามได้ชัดเจน บางโครงงานมีวิธีการนำเสนอที่ทำให้ผู้ฟังมีส่วนร่วม